



U. Kivi

**Painovoima II–  
relativistinen planeetan rata**

Painovoima II –  
relativistinen planeetan rata



U. KIVI

---

**Painovoima II –  
relativistinen planeetan rata**

© 2021 U. Kivi

Taitto ja kansi: Books on Demand

Kustantaja: BoD – Books on Demand, Helsinki, suomi

Valmistaja: BoD – Books on Demand, Norderstedt, Saksa

ISBN: 978-952-80-4003-3

# SISÄLTÖ

Esipuhe .....	7
1. Johdanto .....	9
2. Planeetan rata .....	11
2.1 Perusteoria .....	11
2.2 Laskenta menetit .....	14
2.3 FORTRAN-ohjelma planeetan radan laskemiseksi .....	15
2.4 Klassinen ratkaisu planeetan radalle .....	16
2.5 Planeetan rata suhteellisuusteorian mukaan .....	18
3. Laskentatapaukset .....	21
3.1 Laskentatapaus 1: Merkuriuksen rata Newtonin ja Einsteinin mukaan ..	21
3.2 Laskentatapaus 2: Auringon massa kerrottu luvulla 0.4E6 .....	26
3.3 Laskentatapaus 3: Auringon massa kerrottu luvulla 1.0E6 .....	30
3.4 Laskentatapaus 4: Auringon massa kerrottu luvulla 2.522090E6 .....	33
3.5 Laskentatapaus 5: Auringon massa kerrottu luvulla 2.522091E6 .....	38
3.6 Laskentatapaus 6: Auringon massa on kerrottu luvulla 3.0E6 .....	41
3.7 Laskentatapaus 7: Auringon massa on kerrottu luvulla 30.0E6 .....	44
3.8 Laskentatapaus 8: Auringon massa kerrottu luvulla 300.0E6 .....	47
4. Ratayhtälö kirjallisuudessa .....	51
4.1 Johdanto .....	51
4.2 Tyypillinen ratayhtälön laskenta .....	51
Viitteet .....	55
Liite 1: FORTRAN-ohjelma .....	57
Liite 2: Merkuriuksen rata .....	71
Liite 3: 4-asteen polynomien nollakohtien määrittäminen .....	79



# ESIPUHE

Tämä kirja on jatko-osa kirjalle /1/: 'Painovoima, Newtonin ja Einsteinin teoria helpolla tavalla'. Em. kirjassa ratkotaan painovoimayhtälöitä normaalista poikkeavalla tavalla. Newtonin teorian kaavat johdetaan käänteisesti normaalimenettelyyn verrattuna. Lähtökohdaksi otetaan havainnot eli elliptinen rata ja teoria kehitetään vaatimalla, että planeetan kiihtyvyys radallaan osoittaa kohti aurinkoa, joka sijaitsee rataellipsin toisessa polttopisteessä. Tällä tavoin saadaan matemaattisesti normaalimenettelyä helpommin planeetan paikka ajan funktiona ja siten myös planeetan nopeus ja kiihtyvyys paikan tai ajan funktiona.

Kirjan /1/ suhteellisuusteoriaa käsittelevässä osassa planeetan radan Eulerin yhtälöt johdetaan eri tavalla kuin normaalisti ja saadaan myös eri yhtälöt kuin normaalisti. Eulerin yhtälöt ratkaistaan sijoittamalla yhtälöihin yritefunktio, joka on summa klassisen mekaniikan mukaisesta ratkaisusta ja tuntemattomasta funktiosta. Näin tuntemattomalle funktiolle saadaan sellainen differentiaaliyhtälö, joka voidaan ratkaista. Kyseessä lienee uudenlainen tapa ratkaista planeetan rata yleisen suhteellisuusteorian mukaan. Edellä esitetyllä tavalla menetellen Eulerin yhtälöistä johdettuun ratayhtälöön tulee vain yksi integroimisvakio, kun normaalimenettelyssä ratayhtälöön tulee kaksi integroimisvakiota. Kirjan /1/ Eulerin yhtälöiden ratkaisu yhdessä ja kahdessa dimensiossa on sopivilla integroimisvakioiden valinnoilla sama kuin 'normaalien' Eulerin yhtälöiden ratkaisu.

Tässä kirjassa jatketaan ratayhtälön kehittelyä lähtökohtana kirjan /1/ tulokset.





# 1. JOHDANTO

Tässä kirjassa otetaan lähtökohdaksi viitteessä /1/ johdetut Eulerin yhtälöt ja kehitetään käyttökelpoinen menetelmä planeetan radan laskemiseksi yleisen suhteellisuusteorian kaavoilla. Kirjallisuudessa esitetyissä planeetan ratayhtälöissä on kaksi integroimisvakioita, joille saadaan arvot vaatimalla, että ratkaisu lähestyy klassista ratkaisua, kun valonnopeus lähestyy ääretöntä  $c \rightarrow \infty$  (klassinen raja). Tällainen menettely ei ole matemaattisesti täsmällinen, koska se jättää huomiotta, että ratkaisu saattaisi sisältää sellaisen vakion kertojana, joka lähestyy klassisella rajalla 1:stä. Viitteen /1/ käsittelyssä Eulerin yhtälöt tehdään eri tavalla kuin normaalisti eikä integroimisvakioita tule yhtälöihin, jos kulmanopeuden ratkaisu tehdään siten, että se lähestyy klassista lauseketta klassisella rajalla. Matemaattisesti tähän kuuluisi integroimisvakio. Kulmanopeuden lausekkeessa tämä vakio voidaan kertoa klassisen rataellipsin pikkuakselin puolikkaaseen ja käytännössä tämä vakio piti kuitenkin ottaa viitteessä /1/ implisiittisesti käyttöön ja muuttaa pikkuakselin pituutta siten, että auringon paikka saatiin suhteellisuusteoreettisessa ratkaisussa kohdalleen.

Tässä teoksessa edetään matemaattisesti täsmällisemmin kuin viitteessä /1/. Vaatimalla, että suhteellisuusteorian mukaisen ratkaisun ja klassisen ratkaisun etäisyydet auringosta perihelissä ja aphelissä ovat samat, johdetaan kirjallisuudessa esiintyville integroimisvakioille lausekkeet perihelin ja aphelin etäisyyksien sekä Schwarzschildin säteen funktiona. Osoittautui, että viitteessä /1/ tehty pikkuakselin arvon korjaus on jokseenkin tarkka myös tämän matemaattisesti eksaktimman tarkastelun valossa. Tällainen korjaus voitiin tehdä, koska suhteellisuusteoreettisessa ratkaisussa isoakselin ja pikkuakselin arvot ovat pelkkiä parametreja ilman geometristä tulkintaa, eikä suhteellisuusteoreettinen ratkaisu ole ellipsi vaikkakin hyvin lähellä ellipsiä heikossa painovoimakentässä. Viitteessä /1/ pikkuakselin puolikasta suurennettiin 3018.779 m ja isoakselin arvoa ei muutettu. Näin saatiin auringon paikka klassisessa ratkaisussa ja suhteellisuusteorian mukaisessa ratkaisussa 0.4 mm:n tarkkuudella samaan pisteeseen isoakselilla. Tämän kirjan täsmällisemmän matemaattisen käsittelyn mukaan suurennetaan pikkuakselin puolikasta 3018.79877 m ja isoakselin puolikasta 0.00016 m. Näin saadaan aurinko klassisen ja suhteellisuus teorian mukaan täsmälleen saamalle etäisyydelle perihelissä ja aphelissä (tarkasti puhuen ei voi sanoa, että samaan pisteeseen isoakselilla, koska apheli, periheli ja auringon keskipiste eivät ole samalla suoralla suhteellisuusteorian mukaan).



**K**irjassa on johdettu lausekkeet suhteellisuusteoreettisessa ratayhtälössä esiintyville integroimisvakioille planeetan radan minimi- ja maksimietäisyyden ja Schwarzschildin säteen funktiona. Kirjassa on esitelty algoritmi kappaleen radan laskemiseksi suhteellisuusteorian mukaan. Kirjan liitteenä on annettu laskenta-algoritmia soveltava tietokoneohjelma. Ohjelmalla on laskettu 8 eri tapausta, joissa on varioitu auringon tai mustan aukon massaa. Lasketut planeetan radat on esitetty kuvina. Perihelin edistymä on esitetty planeetan radan kulmakoordinaatin funktiona kussakin laskentatapauksessa. Tekstiä selventää yli 20 planeetan radan muotoa kuvailevaa tietokoneohjelman laskemaa käyrää.

**BoD**

